Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Michael Lösch — Wintersemester 2020/2021

Lineare Algebra I
Blatt 3
Abgabe: 30.11.2020, 10 Uhr
Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.**
Eine lineare Ordnung $<$ (siehe Appendix C im Skript) ist kompatibel mit den Ringoperationen des kommutativen Ringes R, wenn

$$a < b \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a + c < b + c \text{ für alle } c \text{ und} \\ ac < bc, \text{ falls } c > 0_R \end{cases}$$

(a) Zeige, dass die Quadrate $\{a^2\}_{a \in R}$ bezüglich jeder kompatiblen linearen Ordnung positiv sind.

(b) Gibt es eine kompatible lineare Ordnung auf dem Körper $\mathbb{C}$?

(c) Besitzt R eine kompatible lineare Ordnung, wenn R von positiver Charakteristik ist?

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**
Sei R ein Ring mit Eins derart, dass $a^2 = a$ für jedes Element a aus R.

(a) Zeige, dass $-a = a$ für jedes a aus R. Bestimme die Charakteristik von R.

(b) Schließe daraus, dass R kommutativ sein muss.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.**
Sei p eine Primzahl und R ein kommutativer Ring der Charakteristik p. Zeige, dass die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} (R,+) & \to & (R,+) \\ x & \mapsto & x^p \end{array}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.**

(a) Sind die Vektoren $3+4i$ und $1-2i$ des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{C}$ linear unabhängig? Und als Vektoren des $\mathbb{C}$-Vektorraumes $\mathbb{C}$?

(b) Sind die Vektoren $3 - 2\sqrt{2}$ und $1 + \sqrt{2}$ des $\mathbb{Q}$-Vektorraumes $\mathbb{R}$ linear unabhängig? Und als Vektoren des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}$?

Abgabe in ILIAS als eine einzige PDF-Datei einreichen.